

ALGEBRA

Quadratische Gleichungen

Teil 2

Kompakt das Wichtigste

Wiederholungsaufgaben
für Vergessliche

Hier ohne quadratische Ergänzung

18 Musterbeispiele 97 Aufgaben 24 Seiten Lösungen

Datei 12221

Stand 14. August 2018

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

<http://mathe-cd.schule>

Vorwort

Dieser Text ist eine Sammlung mit vielen quadratischen Gleichungen zum Üben. Nach einigen Musteraufgaben folgt eine Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungen. Hier wird kaum Theorie vermittelt, sondern im Wesentlichen nur geübt.

Auf die Lösung mit quadratischer Ergänzung wird hier nicht eingegangen. Diese wird in 12230 ausführlich behandelt, und in 12236 gibt es Übungsaufgaben dazu.

Übersicht über die Texte zu quadratischen Gleichungen und ähnlichem

12220	Quadratische Gleichungen 1	Sehr ausführlicher Text
12221	Quadratische Gleichungen	Aufgaben aus 12220 – kompakt! (Dieser Text!)
12222	Quadratische Gleichungen	Lernprogramm!
12223	Quadratische Gleichungen	Textaufgaben
12225	Quadratische Gleichungen	Lernblatt: Das Wichtigste zum Lernen
12226	Quadratische Gleichungen	Quadratische Ergänzung, Übungsaufgaben
12230	Gleichungen 3. und 4. Grades, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12240	Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen.	
12241	Übungsaufgaben	zu 12240
12245	Wurzelgleichungen 1	
12246	Wurzelgleichungen 2	Übungsaufgaben zu 12245
12260	Gleichungen höheren Grades	
12270	Diverse Gleichungen	Methodentraining
12270	Diverse Gleichungen	Methodentraining

Inhalt:

1	Übersicht über die zu lernenden Fakten	3
2	Musterbeispiele zur Mitternachtsformel und zur p-q-Formel	4
3	Rechenricks zur Mitternachtsformel	9
4	Spezial-Lösungen für Spezial-Gleichungen	12
4.1	Quadratische Gleichungen ohne Absolutglied	12
4.2	Reinquadratische Gleichungen	13
4.3	Erweiterte reinquadratische Gleichungen	15
5	„Verbogene“ quadratische Gleichungen	16
6	Aufgabensammlung	17
	Lösungen	19 - 32

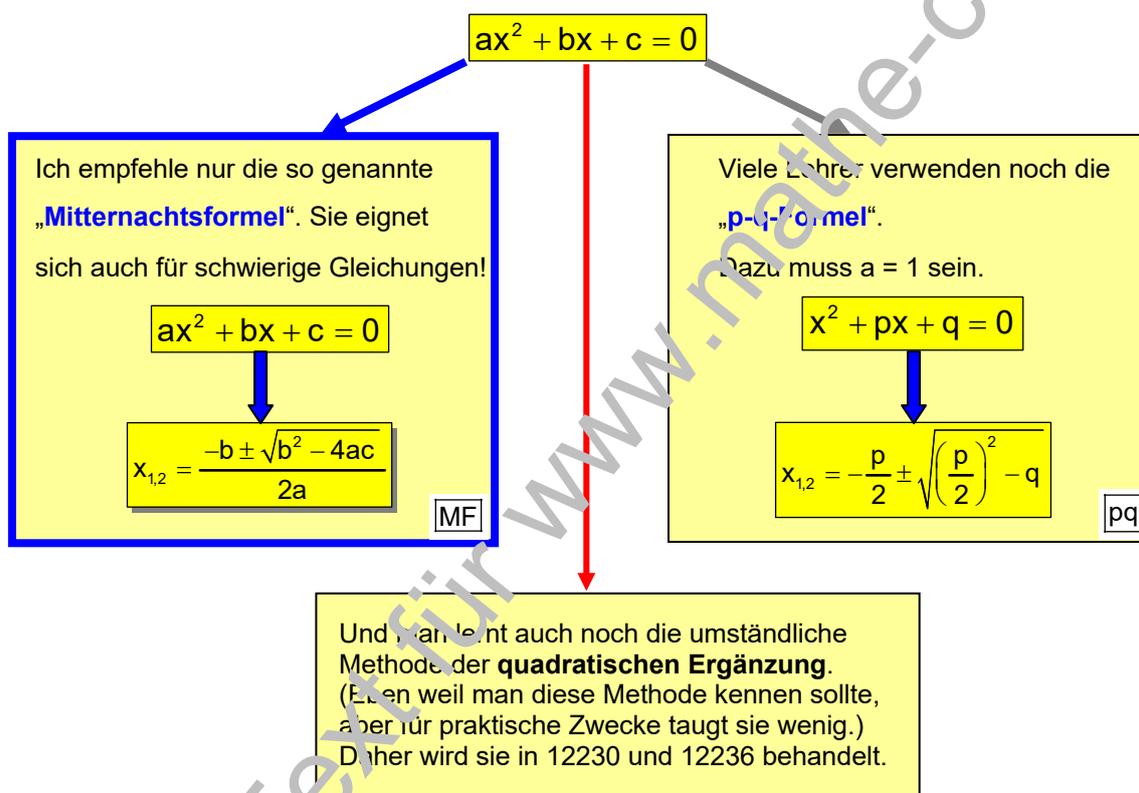
1 Übersicht über die zu lernenden Fakten

Eine quadratische Gleichung kann man auf diese Form bringen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sie heißt die Normalform einer quadratischen Gleichung. a , b und c heißen Koeffizienten. ax^2 ist der quadratische Summand, bx der lineare Summand, und c heißt das Absolutglied.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Lösungen einer quadratischen Gleichung zu bestimmen:



WISSEN:

Es gibt **drei Spezialfälle**, in denen man diese Lösungsformeln nicht verwenden sollte, weil es anders sehr viel schneller geht. Diese Fälle sind:

1. Fall: Quadratische Gleichung ohne Absolutglied: $ax^2 + bx = 0$
2. Fall: Die reinquadratische Gleichung: $ax^2 + c = 0$ bzw. $x^2 = k$
3. Fall: Die erweiterte reinquadratische Gleichung: $(ax + b)^2 = c$

Die Lösungsmethoden zu diesen drei Fällen werden später besprochen

2 Musterbeispiele zu „MN“ und „pq“

1. Musterbeispiel: $x^2 - 8x + 7 = 0$

(a) Lösung mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zuerst identifiziert man die drei Koeffizienten:

$$a = 1, \quad b = -8, \quad c = 7$$

Einsetzen in „MN“:

$$x_{1,2} = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \quad (1)$$

Zusammenfassen und berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

Es gibt somit 2 Lösungen:

$$x_1 = 7 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Anmerkung; Ich schreibe dies gleich so auf:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

Lösungsmenge:

$$L = \{ 1; 7 \}$$

b) Lösung mit der „p-q-Formel“:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Zuerst identifiziert man die zwei Koeffizienten:

$$p = -8, \quad q = 7$$

Einsetzen in „pq“:

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 7}$$

Zusammenfassen und berechnen:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 7} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm \sqrt{9}$$

Es gibt somit 2 Lösungen:

$$x_{1,2} = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

Lösungsmenge:

$$L = \{ 1; 7 \}$$

So ausführlich wird man die Rechnungen nicht aufschreiben, eher so:

a) „MN“: $x^2 - 8x + 7 = 0$ Den Bruch (1) wird man gleich im Kopf so verrechnen:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

b) „pq“: $x^2 - 8x + 7 = 0$ Auch hier wird man einen Zwischenschritt im Kopf berechnen:

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 7} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

2. Musterbeispiel:

$$5x^2 + 9x - 2 = 0$$

WICHTIG!**(a) Lösung mit der Mitternachtsformel:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zuerst identifiziert man die drei Koeffizienten:

$$a = 5, \quad b = 9, \quad c = -2$$

Einsetzen in „MN“:

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{10}$$

Zusammenfassen und berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 11}{10} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \\ -\frac{20}{10} = -2 \end{array} \right.$$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \frac{1}{5}; -2 \right\}$$

b) Lösung mit der „p-q-Formel“:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Weil in $5x^2 + 9x - 2 = 0$ $a \neq 1$ ist, muss man zuerst durch 5 dividieren: $x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0$

Dann identifiziert man die zwei Koeffizienten:

$$p = \frac{9}{5} \quad \text{und} \quad q = -\frac{2}{5}$$

Einsetzen in „pq“:

$$x_{1,2} = -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \frac{2}{5}}$$

Hier musste man wissen:

$$\frac{\frac{9}{5}}{2} = \frac{9}{5 \cdot 2} = \frac{9}{10}!$$

Zusammenfassen:

$$x_{1,2} = -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{2}{5}} = -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{40}{100}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{121}{100}} = -\frac{9}{10} \pm \frac{11}{10} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \\ -\frac{20}{10} = -2 \end{array} \right.$$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \frac{1}{5}; -2 \right\}$$

Man konnte jetzt sehen, wie aufwändig die p-q-Formel wird, wenn in der quadratischen Gleichung der Koeffizient $a \neq 1$ ist. Das Rechnen mit den dann folgenden Brüchen stellt für viele Schüler ein Problem dar. Ganz anders dabei die „Mitternachtsformel“.

Daher zeige ich meinen Schülern die „p-q-Formel“ gar nicht erst. Es gibt noch schlimmere Beispiele zu diesem Thema!

6 Aufgabensammlung

Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen mit der Mitternachtsformel oder mit der p-q-Formel. Aus Platzgründen wurde die Lösungsmenge meistens weggelassen.

Aufgabe 1

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ c) $x^2 + 8x - 33 = 0$
 d) $x^2 - 7x - 8 = 0$ e) $x^2 + 7x + 10 = 0$ f) $x^2 - 3x - 28 = 0$

Aufgabe 2

 Ziehe teilweise die Wurzeln.

a) $x^2 - 4x - 1 = 0$ b) $x^2 + 8x + 10 = 0$ c) $x^2 - 6x - 9 = 0$
 d) $x^2 - 5x - 5 = 0$ e) $x^2 + 2x - 11 = 0$ f) $x^2 - 15x + 25 = 0$

Aufgabe 3

 Besondere Gleichungen.

a) $x^2 - 12x + 36 = 0$ b) $x^2 + 26x + 169 = 0$ c) $x^2 - 4x + 4 = 0$
 d) $x^2 + x + 5 = 0$ e) $x^2 + 5x + 7 = 0$ f) $x^2 - 8x + 17 = 0$

Aufgabe 4

 Nutze die günstige Form der Gleichung mit der Mitternachtsformel (keine p-q-Lös.)

a) $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x - 10 = 0$ c) $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 12 = 0$
 d) $\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{3}{2} = 0$ e) $\frac{1}{2}x^2 + 6x + 8 = 0$ f) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = 0$
 g) $\frac{1}{4}x^2 + x - 24 = 0$ h) $\frac{1}{4}x^2 + x - 8 = 0$ i) $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 = 0$
 j) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 10 = 0$ k) $x^2 + 5x - \frac{7}{4} = 0$ l) $x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

Aufgabe 5

 Rechne günstig! (keine p-q-Lösungen)

a) $x^2 - 16x + 48 = 0$ b) $-x^2 + 16x + 48 = 0$ c) $x^2 - 18x + 80 = 0$
 d) $x^2 + 26x + 168 = 0$ e) $-x^2 - 12x + 64 = 0$ f) $x^2 + 20x + 96 = 0$

Aufgabe 6

 MN- oder p-q-F. Wichtige Aufgaben.

a) $2x^2 + 4x - 9 = 0$ b) $3x^2 - 14x + 7 = 0$ c) $15x^2 - 11x + 3 = 0$
 d) $-5x^2 + 130x - 60 = 0$ e) $-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = 0$ f) $\frac{3}{4}x^2 - x - 1 = 0$

Aufgabe 7

 Beseitige zuerst einige Brüche.

a) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{10}{3} = 0$ b) $-\frac{1}{8}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$ c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2 = 0$
 d) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 = 0$ e) $\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ f) $\frac{1}{32}x^2 + x + \frac{1}{8} = 0$

Aufgabe 8

 Alles gemischt

a) $3x^2 + 4x - 28 = 0$ b) $-\frac{1}{6}x^2 + x + 3 = 0$ c) $15x^2 - 3x + 4 = 0$
 d) $-2x^2 + 7x + 9 = 0$ e) $\frac{1}{2}x^2 - 4x - 90 = 0$ f) $-7x^2 + 56x + 63 = 0$

Die Gleichungen in den Aufgaben 9 bis 12 sollten ohne Lösungsformeln gelöst werden.
Musterbeispiele findet man in den Abschnitten 4.1, 4.2 und 4.3.

Aufgabe 9

a) $x^2 - 25 = 0$	b) $x^2 - 169 = 0$	c) $x^2 - 32 = 0$
d) $3x^2 - 60 = 0$	e) $\frac{1}{2}x^2 - 14 = 0$	f) $x^2 + 49 = 0$

Aufgabe 10

a) $x^2 + 7x = 0$	b) $x^2 - \frac{5}{3}x = 0$	c) $2x^2 - 4x = 0$
d) $5x^2 + 8x = 0$	e) $\frac{1}{4}x^2 - 13x = 0$	f) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x = 0$

Aufgabe 11

a) $(x-9)^2 = 81$	b) $(x-4)^2 = 1$	c) $(x+2)^2 = 5$
d) $(x+1)^2 = 4$	e) $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 8$	f) $\frac{2}{3}(x-3)^2 = 6$
g) $\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})^2 = 2$	h) $\frac{1}{3}(x-7)^2 + 4 = 0$	i) $\frac{1}{2}(x+3)^2 = 0$

Aufgabe 12

a) $2(x+\frac{3}{2})^2 = 4$	b) $\frac{1}{4}(x+13)^2 + 2 = 0$	c) $(\frac{1}{6}x+3)^2 = 16$
d) $-(x+2)^2 = -3$	e) $\frac{1}{2}(x+4)^2 = 2$	f) $-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$

Aufgabe 13 Bringe die den Beispielen a) – ii) auf Seite 16 genannten Gleichungen in die Normalform und löse sie dann.

Aufgabe 14 Forme die Gleichungen zuerst um.

a) $3x(4x+2) - 6x(6x+5) = 0$
b) $3x(x-2) - 8x(5x-3) = -81 - 38x^2$
c) $(x+3)(x-2) = x+10$
d) $8(x^2 - 5x + 4) - 4x(x-5) = 16(x+2)$
e) $2(x^2 + 3x + 3) - 2(x-3) = 6(x^2 + 3x + 5)$
i) $(3x+4)^2 + (5x-3)^2 = (2x-5)^2$
g) $(3x+13)^2 - (6x-5)^2 = (5x+12)^2$
h) $(x+17)^2 - 7(x+17) = 0$